

TD N°2 : Les espaces vectoriels normés

Exercice 1

Soient A et B deux fermés disjoints non vides d'un espace vectoriel normé E . Considérons l'application : $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$, où $d(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\}$ désigne la distance de x à A .

1. Montrer que : $\forall x \in A, \quad \varphi(x) < 0$ et $\forall x \in B, \quad \varphi(x) > 0$.
2. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V vérifiant $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On veut montrer que φ est continue si, et seulement si, le noyau de φ est fermé.

1. Démontrer le sens direct.
2. Réciproquement, on suppose que le noyau de φ est fermé.
 - (a) Montrer que $\varphi^{-1}(\{1\})$ est un fermé de E , et déduire qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\overline{B(0, r)} \cap \varphi^{-1}(\{1\}) = \emptyset.$$

- (b) Démontrer que

$$x \in \overline{B(0, r)} \implies |\varphi(x)| \leq 1.$$

3. Conclure.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On veut redémontrer le résultat de exercice 1 par une autre méthode. Supposons que le noyau de φ est fermé.

1. Démontrer que pour tout $a \notin \text{Ker}(\varphi)$, on a : $E = \mathbb{K}a \oplus \text{ker}(\varphi)$.
2. Justifier que $d(e, \text{Ker}(\varphi)) > 0$ et déduire que φ est continue.

Exercice 4

1. Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R})$. Supposons que $(AB)^n \rightarrow O$. Montrer que $(BA)^n \rightarrow O$.
2. Soient $A, B \in M_p(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Supposons que $A^n \rightarrow P$ et $B^n \rightarrow Q$. Montrer alors que P et Q commutent.
3. Soit $(A_n)_n$ une suite de matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$. Supposons que $A_n \rightarrow A$ et $A_n^{-1} \rightarrow B$. Montrer que A est inversible et préciser A^{-1} .
4. Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$. Supposons que $A^n \rightarrow B$. Montrer que B est la matrice d'un projecteur.
5. Soit $A \in M_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $Sp(A) \subset]-1, 1[$. Montrer que $A^n \rightarrow 0$.

Exercice 5

On note ℓ^1 l'espace des suites réelles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum x_n$ converge absolument. On munit ℓ^1 de la norme :

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $e^{(n)}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1. Montrer que : $F = \text{Vect}(e^{(n)} \mid n \in \mathbb{N})$ est dense dans ℓ^1 .
2. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que l'application :

$$\varphi_a : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^1 , et déterminer sa norme subordonnée.

3. Réciproquement, montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^1 est de la forme φ_a avec a une suite réelle bornée.

Exercice 6

Montrer que $D_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$, est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 7

1. Montrer que l'application suivante est continue :

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}_n[X], \quad A \mapsto \chi_A$$

2. Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall A \in GL_n(\mathbb{C}), \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. En déduire que : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}$.
4. Montrer que l'application suivante est continue :

$$\Psi : \mathbb{C}_n[X] \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad (P, A) \mapsto P(A).$$

5. Montrer que pour toute matrice diagonalisable A , on a : $\chi_A(A) = 0$.
6. En déduire le fameux théorème de Cayley–Hamilton : $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \chi_A(A) = 0$.

Exercice 8

Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A , c'est-à-dire

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\},$$

et on note $\|A\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$